

Korollar 2 : (Bernstein auf $(-1,1)$)

Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ mit $f^{(n)}(x) \geq 0$
für alle x und n groß genug. Dann

gilt:

$$f(x) = T_0 f(x), \quad |x| < 1$$

Beweis: Übung! Idee:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$f_1(x) := \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) \quad \text{"gerade",}$$

$$f_2(x) := \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) \quad \text{"ungerade",}$$

benutze Satz 15.2 bzw. Korollar 1

□

Beweis von Bernstein: Sei $a \in \mathbb{I}$

fixiert. Wähle $\varepsilon > 0$ mit

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I.$$

Transformation:

$$\begin{cases} \widetilde{f}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \widetilde{f}(y) := f(\varepsilon y + a) \end{cases}$$

$$\text{Korollar 2} \implies \widetilde{f}(y) = \overline{T}_0 \widetilde{f}(y), \quad |y| < 1$$

Rücktransformation $\implies$

$$f(x) = \overline{T}_a f(x),$$

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Anmerkung I: Sei $f \in C^\infty$ auf

$[a-r, a+r]$. Gilt

$$(*) \quad f^{(n)}(x) \geq 0,$$

so folgt $f = T_a f$ auf $(a-r, a+r)$.

Korollar 2

(Transformation in ~~Satz 45.2~~).

Man kann $(*)$ ersetzen durch

$$(**) \quad f^{(n)}(x) \geq -c$$

mit einem $c \geq 1$. Dann sei

$$g(x) := f(x) + K \cdot \exp(c(x-a))$$

mit K so groß, dass

$$K \exp(c(x-a)) \geq 1$$

auf $[a-r, a+r]$. Es folgt:

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + K c^n \exp(c(x-a))$$

$$\gg f^{(n)}(x) + c^n \gg 0$$

(Wahl von
K)

Nun wende die transformierte Version
von Korollar 2 auf g an $\Rightarrow$

$$g(x) = T_a g \text{ auf } (a-r, a+r)$$

Df. von

$\Rightarrow$

g

$$f(x) = T_a f$$

-||-



Anmerkung II : bisherige Situation
in der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)$

• Entwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)$

• Diskussion der Konvergenz auf
offenen Intervallen $(a-r, a+r)$

Wenn die Reihe auch noch in einem
Randpunkt konvergiert, hat man folgende
Zusatzinformation über das Konvergenz-
verhalten insgesamt.

Satz 15.3 (- Grenzwertsatz von Abel)

Mit den Bezeichnungen von oben

sei die Reihe punktweise

-81-

konvergent auf $(a-r, a+r)$.

[impliziert gleichmäßige Kgnz auf
kompakten Teilintervallen]

Außerdem existiere
 $\lim_{x \rightarrow \underline{a+r}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$.

Dann ist die Konvergenz (glm.) auf
 $[a, a+r]$, die Potenzreihenfunktion
ist dort also stetig, so dass

$$\lim_{x \rightarrow a+r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Bem: analoge Aussage, falls Kugnz in $a-r$ oder sogar in beiden Randpunkten vorliegt.

Beweis: —

Beispiel: Beh:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

für $-1 \leq x \leq 1$

Beweis: Für $|x| < 1$ ist

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt \quad \text{Satz 13.2}$$

- 83 -

[glm. Konvergenz der Reihe für $-|x| \leq t \leq |x|$]

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Leibniz - Kriterium $\Rightarrow$ Konvergenz in ± 1 ;
da $\arctan$ auf $[-1, 1]$ stetig ist,
ergibt 15.3 die Darstellung. $\square$

Zurück zum Ausgangsproblem:

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben; finde
einfache Fkten (= Polynome), die
 f (lokal) gut approximieren

bisheriger Lösungsvorschlag:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } f \text{ genügend oft diff'bar ist,} \\ \text{so betrachte man die Taylor-Polynome} \\ T_{n,a} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k. \end{array} \right.$$

Was macht man mit nur stetigen f ?

Die Wahl $T_{a,0} f \equiv f(a)$ ist suboptimal!

Satz 15.4 (Approximationssatz von Weierstraß)

Sei $f \in C^0([a,b])$ (reell oder komplex). Dann gibt es eine Folge

P_n von Polynomen mit $P_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$.

(„Stetige Funktionen lassen sich auf kompakten Intervallen gleichmäßig durch Polynome approximieren“)

Beweis: o. E. $[a, b] = [0, 1]$ (Transformation)

Beobachtung von Bernstein (~ 1912):

Offenbar:
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \equiv 1$$

Das bedeutet im Fall $f(x) \equiv 1$:

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = f(x)$$

= Mittel der Werte von f an den Stellen $0, \frac{1}{n}, \dots, n$

Zeige: 1.) die Formel gilt auch
für $\varphi(x) := x, x \in [0,1]$

2.) im Fall $\varphi(x) := x(1-x), x \in [0,1]$,

bekommt man rechts

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) x(1-x) \begin{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{pmatrix} \varphi(x)$$

Bernstein-Polynome zu $\varphi \in C^0([0,1])$:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Mit längerer Rechnung folgt:

$$P_n \Rightarrow \varphi \text{ auf } [0,1].$$



Fourier - Reihen

-87-

physikalische Vorstellung: periodische

Vorgänge, also Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

mit etwa $f(x) = f(x + 2\pi)$, sollten

angepasst approximiert werden, also durch
Überlagerung der

Grundschwingungen: $\sin x, \cos x$

mit den

Oberschwingungen: $\sin(nx), \cos(nx)$.

Eine Polynomapproximation trägt der Periodizität

keine Rechnung!

Ziel:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

Lektion 6